Piramida liczbowa (szkic rozwiązania)

Zadanie to można próbować rozwiązać na co najmniej dwa sposoby:

- „od góry" – zgadywać kolejne poziomy piramidy używając przeszukiwania z nawrotami (backtracking). Każda liczba z wyższego poziomu rozbija się na iloczyn pewnych dwóch liczb (jej dzielników), a rozbicia sąsiednich liczb muszą być ze sobą kompatybilne (np. środkowa liczba w trzecim poziomie od góry jest jednocześnie prawym synem lewej liczby z drugiego poziomu oraz lewym synem prawej liczby z drugiego poziomu).
- „od dołu" – zgadnąć, z użyciem przeszukiwania z nawrotami, jakie liczby powinny znajdować się na najniższym poziomie, a następnie sprawdzić czy prowadzi to do uzyskania odpowiedniego wyniku na szczycie piramidy.

Wydaje się, że prostsze (co najmniej w analizie) jest rozwiązywanie od dołu – należy zgadnąć tylko jeden wiersz a wręcz, jak się okaże za chwilę, tylko kilka pól w tym wierszu. Aby przeszukiwanie z nawrotami opisane w powyższych punktach było dostatecznie szybkie należy zauważyć, że:

- każda liczba w piramidzie musi być dzielnikiem N,
- liczba na j-tej pozycji w i-tym wierszu (od dołu, numerując od 0) występuje w iloczynie na szczycie piramidy K-poziomowej w potędze $\binom{K-i}{j}$ (zależność wynika wprost z zasady tworzenia trójkąta Pascala $\binom{N}{K} = \binom{N-1}{K-1} + \binom{N-1}{K}$),
- na każdym poziomie iloczyn wartości pól podniesionych do odpowiedniej potęgi (*) j/w musi być równy N.

W piramidach z małym K można przeanalizować wszystkie sensowne możliwości, a piramidy z dużym K okazują się być równie łatwe: jeśli wartość danego pola miałaby występować w potędze co najmniej 40 to musi być równa 1 (w przeciwnym razie liczba na szczycie piramidy byłaby większa niż $2^{40} > 10^{12}$). Wstawienie wartości innych niż 1 możliwe jest więc jedynie w bliskiej okolicy brzegów piramidy (tam gdzie $\binom{K}{j} < 40$).

Łatwo z tego skorzystać jeśli na dolnym poziomie zacząć zgadywać w kolejności: pierwsze pole, ostatnie pole, drugie pole, przedostatnie pole (zgodnie z rosnącymi wykładnikami wynikającymi z symboli Newtona) itd. Rekursję należy ucinać ilekroć iloczyn (*) jest większy niż N – sprawdzenie czy iloczyn $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k > N$ można wykonać sprawdzając czy $\lfloor N/p_1/p_2/\ldots/p_k \rfloor = 0$. Unikamy wtedy obliczeń na dużych liczbach.

Olimpiada finansowana jest ze środków Ministerstwa Edukacji i Nauki w ramach zadania publicznego „Organizacja i przeprowadzenie olimpiad i turniejów w latach szkolnych 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025".